Colles de Maths - semaine 9
Lycée Aux Lazaristes

Julien Allasia - ENS de Lyon

Questions de cours

— Théorème de Bolzano-Weierstrass
— Unicité de la limite
— Caractérisation séquentielle des limites
— Théorème de la limite monotone
— Théorème de composition des limites
— Propriété de Cauchy
— Toute fonction continue injective sur un intervalle est strictement monotone.

Exercice 1 Soit $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction croissante. Montrer que la fonction $x \mapsto \lim_{x^+} f$ est croissante.

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Posons $g : x \mapsto \lfloor x \rfloor + f(x - \lfloor x \rfloor)$. Déterminer à quelle condition sur f la fonction g est continue.

Exercice 3 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et T-périodique. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(\mathbb{R}) = f\left(\left[a, a + \frac{T}{2}\right]\right).$$

Exercice 4 Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue et surjective. Montrer que $f^{-1}(\{0\})$ est infini.

Exercice 5 Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 6 Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue, telle que $\dfrac{f(x)}{x} \underset{x \to \infty}{\to} l < 1$. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 7 Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue en 0 et 1 qui admet en tout point de $]0,1[$ des limites à gauche et à droite vérifiant

$$\lim_{x^-} f \leq f(x) \leq \lim_{x^+} f.$$

Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 8 Soit $a_1 < a_2 < ... < a_n$ des réels et

$$f : x \mapsto \frac{1}{x - a_1} + \frac{1}{x - a_2} + ... + \frac{1}{x - a_n}.$$

Montrer que f s'annule exactement $n - 1$ fois sur son ensemble de définition.

Exercice 9 Déterminer toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $f(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$.